

---

## Contrôle continu 1

---

**Exercice 1.** On considère  $E = \{(4a, b, 2b, 2a) \in \mathbb{R}^4, a, b \in \mathbb{R}\}$  et  $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z \text{ et } y = t\}$ , deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}^4$ .

1. Montrer que  $E$  et  $F$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^4$ .
2. Déterminer une base de  $E$  et  $F$  et donner leur dimension.
3. Déterminer  $E \cap F$ . A-t-on  $E \oplus F = \mathbb{R}^4$  ?
4. Trouver un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 2.** Soit  $\mathbb{R}[x]$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels. On considère les deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}[x]$  suivants :

$$G = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid P(0) = P(-1) = 0\} \text{ et } H = \mathbb{R}_1[x] = \{P : x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que  $G$  et  $H$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}[x]$ .
2. Déterminer  $G \cap H$ .
3. Soit  $Q \in \mathbb{R}[x]$  et  $P$  le polynôme défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :  $P(x) = Q(x) - (ax + b)$ , pour  $a, b$  des réels fixés. Déterminer  $a, b \in \mathbb{R}$  pour que  $P$  appartienne à  $G$ .
4. En déduire que  $G$  et  $H$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}[x]$ .

**Exercice 3.** Soit  $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$  l'application qui à une matrice  $A$  associe sa matrice transposée  ${}^tA$ . On note  $\mathcal{S}$  le sous-espace de  $M_2(\mathbb{R})$  des matrices symétriques ( ${}^tA = A$ ) et  $\mathcal{A}$  le sous-espace de  $M_2(\mathbb{R})$  des matrices antisymétriques ( ${}^tA = -A$ ).

1. Montrer que  $T$  est une application linéaire. L'application  $T$  est-elle un isomorphisme ?
2. Ecrire la matrice de  $T$  dans la base canonique de  $M_2(\mathbb{R})$ .
3. Donner une base de chacun des sous-espaces  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{A}$  et montrer que  $M_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ .
4. Ecrire la matrice de  $T$  dans la base de  $M_2(\mathbb{R})$  construite à partir des bases de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{A}$ .

**Exercice 4.** Soit  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie pour tout  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$  par

$$f(x, y, z, t) = (x + y, z + t, x + y - z - t).$$

1. Déterminer une base de  $\text{Ker}(f)$ . En déduire la dimension de  $\text{Im}(f)$ , à l'aide du théorème du rang.
2. Déterminer une base de  $\text{Im}(f)$ .